

1. On note  $\mathbb{N}_{\geq 1}$  l'ensemble des nombres entiers strictement positifs. Soit  $f: \mathbb{N}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$  une fonction telle que
- ▶  $f(f(n))$  divise une puissance de  $n$  pour tout entier  $n \geq 1$ ,
  - ▶  $f(mn) \in \{f(m), f(n)\}$  pour tous les entiers  $m \geq 1$  et  $n \geq 1$ , et
  - ▶  $f(k) = 2026$  pour au moins un entier  $k \geq 1$ .

Déterminer toutes les valeurs possibles de  $f(2026)$ .

## Solutions

**Réponse :** L'unique valeur possible est  $f(2026) = 1$ .

**Première solution :** Soit  $f$  un fonction qui satisfait les conditions du problème. La première condition avec  $n = 1$  implique que  $f(f(1)) = 1$ . De plus, avec  $n = p$  un nombre premier, elle donne  $f(f(p)) = p^a$  pour un certain entier  $a \geq 0$ .

On commence par analyser la deuxième condition :  $f(mn) \in \{f(m), f(n)\}$ . Avec  $m = n = p$  un nombre premier, on déduit que  $f(p^2) = f(p)$ . Avec  $m = p^2$  et  $n = p$ , on a de même  $f(p^3) = f(p)$ . Une induction simple donne  $f(p^a) = f(p)$  pour tout premier  $p$  et tout entier  $a \geq 1$ . De plus, étant donnée un entier  $n \geq 2$ , si on note  $n = p_1^{a_1} \cdots p_l^{a_l}$  sa décomposition en facteurs premiers, alors la deuxième condition implique même que

$$f(n) = f(p_i^{a_i}) = f(p_i)$$

pour un certain  $i \in \{1, \dots, l\}$ .

Passons à la troisième condition. Tout d'abord, si  $k = 1$ , alors  $f(2026) = f(f(1)) = 1$ . Si  $k \geq 2$ , alors  $k$  admet un facteur premier  $q$  tel que  $f(k) = f(q)$  par l'observation précédente. On a alors  $f(2026) = f(f(k)) = f(f(q)) = q^a$ . Si  $a = 0$ , alors de nouveau  $f(2026) = 1$ . Sinon  $a \geq 1$  et donc

$$f(f(2026)) = f(q^a) = f(q) = f(k) = 2026.$$

Or, comme la décomposition en facteurs premiers de 2026 est  $2026 = 2 \cdot 1013$ , on a par la deuxième condition  $f(2026) = f(2)$  ou  $f(2026) = f(1013)$ . Dans le premier cas, on aurait  $2026 = f(f(2026)) = f(f(2)) = 2^b$  qui est impossible. Le deuxième cas est impossible pour la même raison. En conclusion, on a forcément  $f(2026) = 1$ .

Il reste à montrer qu'il existe bien une fonction  $f$  pour laquelle  $f(2026) = 1$ . On peut par exemple définir  $f$  par  $f(2^a) = 2026$  pour tout  $a \geq 1$  et  $f(m) = 1$  pour les autres entiers  $m$  ( $y$  compris 1 et 2026). Cette fonction satisfait  $f(f(n)) = 1$  pour tout  $n \geq 1$  et donc la première condition. Comme  $f(2) = 2026$ , elle satisfait aussi la troisième condition. Enfin, si  $mn$  est une puissance de 2, alors  $m$  ou  $n$  est une puissance de 2 et la deuxième condition est vérifiée ; si  $mn$  n'est pas une puissance de 2, alors  $m$  ou  $n$  n'est pas une puissance de 2 et la deuxième condition est aussi satisfaite.

2. Albert vient de terminer l'écriture d'un livre, mais malheureusement son imprimante a mélangé l'ordre des  $N$  pages de son livre. Brigitte se propose de l'aider pour remettre les pages dans le bon ordre. Brigitte ne s'autorise que les deux opérations suivantes qu'elle peut effectuer dans n'importe quel ordre et de manière répétée :

- ▶ Inverser l'ordre des pages en plaçant la première page en dernière position, la deuxième en avant-dernière position et ainsi de suite, jusqu'à placer la dernière page en première position.
- ▶ Si la première page porte le numéro  $M$ , alors Brigitte classe les  $M$  premières pages, mais dans l'ordre décroissant.

Par exemple, si l'ordre des pages était 3, 4, 2, 5, 1, la première opération donnerait 1, 5, 2, 4, 3, tandis que la deuxième opération donnerait 4, 3, 2, 5, 1.

Montrer que Brigitte peut toujours remettre les pages du livre d'Albert dans le bon ordre à l'aide de ces deux opérations.

## Solutions

**Première solution :** Soit  $m$  le numéro de la première page. Montrons que tant que  $m < N$ , on peut obtenir, en au plus deux opérations, une configuration où la première page porte un numéro strictement plus grand que  $m$ .

On applique d'abord la deuxième opération. Les  $m$  premières pages sont alors rangées dans l'ordre décroissant, donc la nouvelle première page est le maximum des  $m$  premières pages initiales. En particulier, cette nouvelle première page est supérieure ou égale à  $m$ .

Si elle est strictement supérieure à  $m$ , alors on a bien augmenté la valeur de la première page. Supposons maintenant qu'elle soit encore égale à  $m$ . Comme les  $m$  premières pages sont alors rangées dans l'ordre décroissant et que la première vaut  $m$ , toutes ces  $m$  pages sont inférieures ou égales à  $m$ . Or elles sont deux à deux distinctes et au nombre de  $m$ , donc ce sont exactement les pages numérotées

$$m, m - 1, \dots, 1.$$

Par conséquent, toutes les autres pages portent un numéro strictement supérieur à  $m$ , en particulier la dernière page. En appliquant alors la première opération, cette dernière page devient la première, et la première page porte donc désormais un numéro strictement supérieur à  $m$ .

Ainsi, tant que la première page ne porte pas le numéro  $N$ , on peut augmenter strictement sa valeur. Après un nombre fini d'étapes, on obtient donc une configuration où la première page porte le numéro  $N$ .

Il suffit alors d'appliquer la deuxième opération : comme  $N$  est en première position, les  $N$  pages sont rangées dans l'ordre décroissant,

$$N, N - 1, \dots, 1.$$

Enfin, en appliquant la première opération, on obtient l'ordre

$$1, 2, \dots, N.$$

Ainsi, Brigitte peut toujours remettre les pages du livre dans le bon ordre.

**Deuxième solution :** Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une configuration à partir de laquelle Brigitte ne puisse pas remettre les pages dans le bon ordre. Parmi toutes ces configurations, choisissons-en une dont la première page porte un numéro aussi grand que possible, et notons  $m$  ce numéro.

On a nécessairement  $m < N$ , car si  $m = N$ , la deuxième opération range toutes les pages dans l'ordre décroissant, puis la première opération donne l'ordre croissant voulu.

Appliquons maintenant la deuxième opération. La nouvelle première page est le maximum des  $m$  premières pages initiales, donc elle est supérieure ou égale à  $m$ .

Si elle est strictement supérieure à  $m$ , on obtient une nouvelle configuration dont la première page porte un numéro plus grand que  $m$ . Par maximalité de  $m$ , cette nouvelle configuration peut être triée, donc la configuration initiale aussi, contradiction.

Supposons donc que la nouvelle première page soit encore égale à  $m$ . Alors, comme les  $m$  premières pages sont rangées dans l'ordre décroissant et que la première vaut  $m$ , ces  $m$  pages sont exactement

$$m, m - 1, \dots, 1.$$

Ainsi, la dernière page porte un numéro strictement supérieur à  $m$ . Après application de la première opération, cette dernière page devient la première, donc la nouvelle première page est strictement supérieure à  $m$ . Par maximalité de  $m$ , cette nouvelle configuration peut être triée, donc la configuration initiale aussi, contradiction.

Cette contradiction montre qu'il n'existe aucune configuration impossible à trier. Donc Brigitte peut toujours remettre les pages dans le bon ordre.

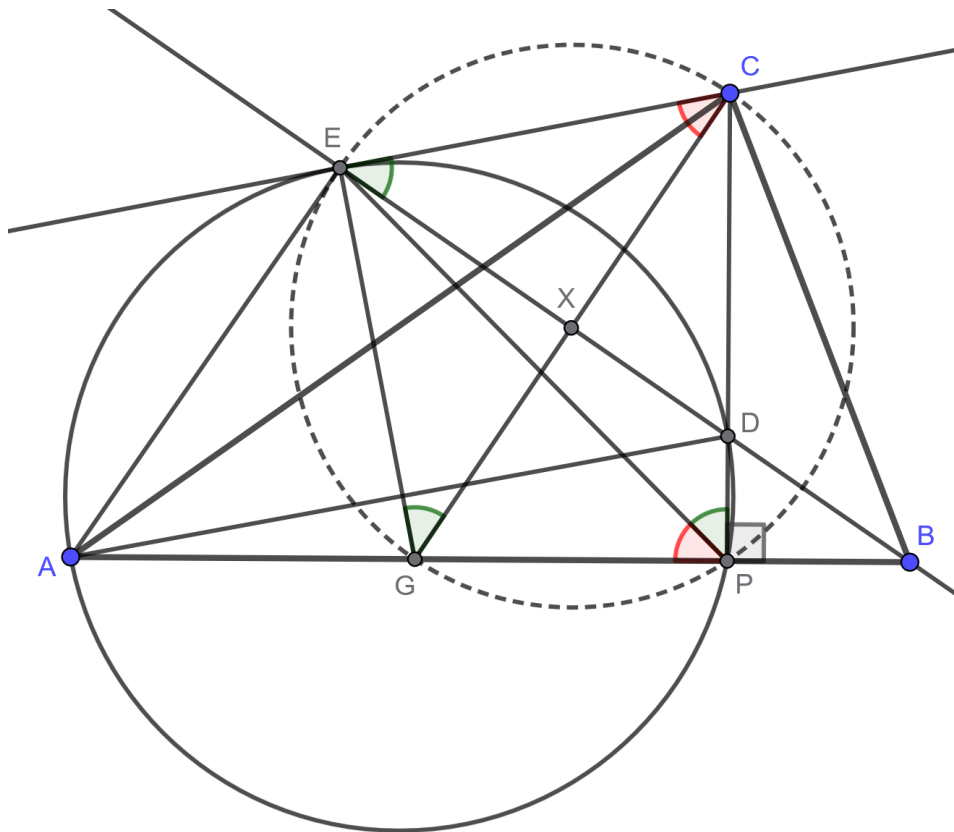
3. Soit  $\widehat{ABC}$  un triangle acutangle et  $P$  le pied de la hauteur issue de  $C$ . La bissectrice de l'angle  $\widehat{ABC}$  coupe le segment  $[PC]$  en  $D$  et intersecte le cercle de diamètre  $[AD]$  en  $D$  et  $E$ . Montrer que si la droite  $(EC)$  est tangente au cercle de diamètre  $[AD]$ , alors la droite  $(PE)$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{APC}$ .

## Solution

On note  $\omega$  cercle circonscrit à  $ADE$ . Soit  $G \in (AB)$  tel que  $(EC) \perp (EG)$ . On observe que  $G$  est sur le cercle circonscrit du triangle  $ECP$  par orthogonalité. De même,  $A, E, D, P$  sont aussi cocycliques par orthogonalité.

On pose  $\alpha = \angle CED$ . Comme  $EC$  est tangente à  $\omega$ , alors  $\angle DPE = \alpha$ , donc  $\angle EPA = 90^\circ - \alpha$ . Par cocyclicité,  $\angle ECG = \angle EPG = 90^\circ - \alpha$ . Ainsi, les droites  $ED$  et  $CG$  sont perpendiculaires en un point  $X$ .

La droite  $(ED)$  est à la fois hauteur et bissectrice au point  $B$  dans le triangle  $CBG$ , donc c'est aussi la médiatrice de  $[CG]$ . Ainsi, le triangle  $ECG$  est isocèle en  $E$  avec  $(ED)$  la bissectrice en  $E$ . Comme il est rectangle en  $E$ , on a  $\alpha = 45^\circ$ . Finalement, on obtient que  $(PE)$  est bissectrice de l'angle  $\angle APC$ .



4. Déterminer le nombre de triplets  $(a, b, c)$  d'entiers strictement positifs tels que

$$a + b + 2c = 28^{29} \quad \text{et} \quad ab = c^2.$$

## Solution

**Réponse :**  $2^{29} \cdot 7^{14} - 1$ .

**Première solution :**

Lemme : Si  $x, y, n$  sont des entiers positifs avec  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = n$ , alors  $x$  et  $y$  sont des carrés parfaits.

Preuve du lemme : Comme  $x = n^2 + y - 2n\sqrt{y}$ , nous savons que  $\sqrt{y}$  est un nombre rationnel. Il existe donc des entiers  $a \geq 0$  et  $b > 0$  tels que  $\sqrt{y} = \frac{c}{d}$ , c'est à dire  $d^2y = c^2$ . En regardant la factorisation en nombres premiers de  $c, d$  et  $y$ , nous en déduisons que  $y$  est un carré parfait. De manière symétrique,  $x$  est aussi un carré parfait. ■

Le système est équivalent à

$$\begin{cases} a + b + 2\sqrt{ab} = n \\ ab = c^2 \end{cases}$$

où  $n = 28^{29}$ . La deuxième égalité détermine  $c$  de manière unique si  $ab$  est un carré parfait, le nombre de triplets recherché est égal au nombre de paires  $(a, b)$  d'entiers strictement positifs tels que

$$\begin{cases} a + b + 2\sqrt{ab} = n \\ ab \text{ est un carré parfait.} \end{cases} \quad (1)$$

L'égalité ci-dessus se réécrit comme

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = n$$

ou

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{n}$$

ou encore

$$\sqrt{na} + \sqrt{nb} = n. \quad (2)$$

En appliquant le lemme à (2), nous remarquons que  $na$  et  $nb$  sont des carrés parfaits. Ceci implique en particulier que  $n^2ab$  et  $ab$  sont aussi des carrés parfaits.

L'égalité (2) implique aussi que  $0 < a < n$ , et chaque  $a$  tel que  $0 < a < n$  et  $na$  est un carré parfait détermine un unique  $b$  tel que  $(a, b)$  satisfait les conditions par  $b = \frac{(n - \sqrt{na})^2}{n} = n + a - 2\sqrt{na} \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Il revient donc à trouver le nombre d'entiers  $a \in ]0, n[$  tels que  $na$  est un carré parfait. Comme  $n = 28^{29} = 2^{58} \cdot 7^{29}$ ,  $na$  est un carré parfait si et seulement si  $a$  est de la forme  $a = 7m^2$  pour un entier  $m$ . La condition  $a \in ]0, n[$  est alors équivalente à  $0 < m < \sqrt{\frac{n}{7}}$ . Vu qu'il y a  $\sqrt{\frac{n}{7}} - 1 = 2^{29} \cdot 7^{14} - 1$  tels  $m$ , le nombre de triplets recherchés est tel qu'annoncé. □

**Deuxième solution :** Le système est équivalent à

$$\begin{cases} a + \frac{c^2}{a} + 2c = n \\ b = \frac{c^2}{a} \end{cases}$$

où  $n = 28^{29}$ , ou encore à

$$\begin{cases} (a+c)^2 = na \\ b = \frac{c^2}{a}. \end{cases}$$

Donc,  $na$  est un carré parfait. De plus, comme  $a+b+2c = n$ ,  $0 < a < n$ . Puisque  $n = 2^{58} \cdot 7^{29}$ , on a que  $a = 7m^2$  pour un entier  $0 < m < \sqrt{\frac{n}{7}}$ . Il existe donc  $2^{29} \cdot 7^{14} - 1$  tels  $a$ . Chacun de ces  $a$  détermine un unique  $c = \sqrt{na} - a$  qui est un entier strictement positif car  $a^2 < na$  qui est un carré parfait. De plus, chaque telle paire  $(a, c)$  détermine un unique  $b = \frac{c^2}{a} = \frac{na+a^2-2a\sqrt{na}}{a} = n+a-2\sqrt{na} \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Il existe donc bien  $2^{29} \cdot 7^{14} - 1$  tels triplets  $(a, b, c)$ .

**Troisième solution :** L'énoncé revient à compter le nombre de triplets  $(a, b, c)$  tels que  $a+b = n-2c$  et  $ab = c^2$ . Pour un  $c$  fixé, un tel triplet va exister si et seulement si le polynôme  $X^2 - (n-2c)X + c^2$  admet deux racines entières strictement positives. Ses racines sont entières si et seulement si  $\Delta = (n-2c)^2 - 4c^2 = n^2 - 4nc$  est un carré parfait. De plus, ses racines seront strictement positives si et seulement si leur somme  $n-2c$  et leur produit  $c^2$  le sont, i.e.,  $0 < c < \frac{n}{2}$ . En outre, si  $\Delta = 0$ , on a  $a = b$  et donc  $c = \frac{n}{4}$  induit un unique triplet. Les autres  $0 < c < \frac{n}{2}$  tels que  $n^2 - 4nc$  est un carré parfait induit deux triplets, car on peut permuter les rôles de  $a$  et  $b$ .

On a  $n^2 - 4nc = n(n-4c) = 28^{29} \cdot (28^{29} - 4c) = 28^{28} \cdot 4 \cdot 7 \cdot (28^{29} - 4c)$ . Il est donc un carré parfait si et seulement si  $7 \cdot (28^{29} - 4c)$  l'est. Pour ce faire, il faut que 7 divise  $c$ , c'est à dire  $c = 7c'$  pour un  $0 < c' < \frac{n}{14} = 28^{28} \cdot 2$ . Il faut alors que  $7 \cdot (28^{29} - 4c) = 7 \cdot (28^{29} - 28c') = 14^2 \cdot (28^{28} - c')$  soit un carré parfait, ce qui arrive si et seulement si  $28^{28} - c'$  est un carré parfait.

Comme il y a  $28^{14}$  carrés parfaits entre 0 (non compris) et  $28^{28}$  (compris), et qu'il faut les compter tous en double sauf un, il y a donc  $2 \cdot 28^{14} - 1 = 2^{29} \cdot 7^{14} - 1$  tels triplets.