



Olympiade Francophone de Mathématiques

Septième édition

Épreuve Junior

28 mars 2026

Durée : 4 heures et demie.

Difficulté : Les exercices *ne sont pas* classés selon leur difficulté.

Langue : Les solutions doivent être rédigées en français.

Points : Chaque exercice vaut 7 points.

1. On note $\mathbb{N}_{\geq 1}$ l'ensemble des nombres entiers strictement positifs. Soit $f: \mathbb{N}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$ une fonction telle que
 - ▶ $f(f(n))$ divise une puissance de n pour tout entier $n \geq 1$,
 - ▶ $f(mn) \in \{f(m), f(n)\}$ pour tous les entiers $m \geq 1$ et $n \geq 1$, et
 - ▶ $f(k) = 2026$ pour au moins un entier $k \geq 1$.

Déterminer toutes les valeurs possibles de $f(2026)$.

2. Albert vient de terminer l'écriture d'un livre, mais malheureusement son imprimante a mélangé l'ordre des N pages de son livre. Brigitte se propose de l'aider pour remettre les pages dans le bon ordre. Brigitte ne s'autorise que les deux opérations suivantes qu'elle peut effectuer dans n'importe quel ordre et de manière répétée :
 - ▶ Inverser l'ordre des pages en plaçant la première page en dernière position, la deuxième en avant-dernière position et ainsi de suite, jusqu'à placer la dernière page en première position.
 - ▶ Si la première page porte le numéro M , alors Brigitte classe les M premières pages, mais dans l'ordre décroissant.

Par exemple, si l'ordre des pages était 3, 4, 2, 5, 1, la première opération donnerait 1, 5, 2, 4, 3, tandis que la deuxième opération donnerait 4, 3, 2, 5, 1.

Montrer que Brigitte peut toujours remettre les pages du livre d'Albert dans le bon ordre à l'aide de ces deux opérations.

3. Soit ABC un triangle acutangle et P le pied de la hauteur issue de C . La bissectrice de l'angle \widehat{ABC} coupe le segment $[PC]$ en D et intersecte le cercle de diamètre $[AD]$ en D et E . Montrer que si la droite (EC) est tangente au cercle de diamètre $[AD]$, alors la droite (PE) est la bissectrice de l'angle \widehat{APC} .
4. Déterminer le nombre de triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs tels que

$$a + b + 2c = 28^{29} \quad \text{et} \quad ab = c^2.$$