

1. Trouver tous les polynômes  $P$  à coefficients entiers tels que, pour tous les entiers  $a \geq 1$  et  $b \geq 1$ , le nombre  $P(a) - P(b)$  soit divisible par  $a + 2b$  ou par  $2a + b$ .

## Solutions

**Réponse :** Seuls les polynômes constants satisfont la condition du problème.

**Première solution :** Clairement les polynômes constants sont solutions. On va montrer qu'il s'agit des seules solutions. Soit donc  $P$  un polynôme de degré  $d \geq 1$  qui satisfait les conditions du problème. Fixons un entier  $a \geq 1$ . Il y a deux possibilités :

- (a) Il existe une infinité d'entiers  $b \geq 1$  tels que  $2a + b$  divise  $P(a) - P(b)$ . Dans ce cas,  $2a + b$  divise aussi  $P(a) - P(b) + (P(b) - P(-2a)) = P(a) - P(-2a)$  pour la même infinité de  $b \geq 1$ . On en déduit que  $P(a) = P(-2a)$ .
- (b) Il existe une infinité d'entiers  $b \geq 1$  tels que  $a + 2b$  divise  $P(a) - P(b)$ . Dans ce cas, on introduit le polynôme à coefficients entiers  $Q(x) = 2^d P(x/2)$ , où  $d \geq 1$  est le degré de  $P$ . Il s'en suit que  $a + 2b$  divise  $2^d(P(a) - P(b))$  et donc  $a + 2b$  divise  $Q(2a) - Q(-a)$  pour une infinité de  $b \geq 1$ . Ainsi,  $Q(2a) = Q(-a)$  et donc  $P(a) = P(-a/2)$ .

On a donc montré que pour tout  $a \geq 1$ , on a soit  $P(a) - P(-2a) = 0$  ou  $P(a) - P(-a/2) = 0$ . L'une des deux éventualités doit être vérifiées pour une infinité de  $a \geq 1$ . On en conclut que l'un des deux polynômes  $P(x) - P(-2x)$  ou  $P(x) - P(-x/2)$  doit être le polynôme nul, car il a une infinité de zéros. Or, comme on suppose que  $P$  est de degré  $d \geq 1$ , les deux polynômes  $P(x) - P(-2x)$  et  $P(x) - P(-x/2)$  sont également de degré  $d \geq 1$ , contradiction.

**Deuxième solution :** On présente une variation de la première solution. Introduisons le polynôme à coefficients entiers  $R(x) = P(x) - P(-2x)$ . La condition devient : pour tous  $a \geq 1$  et  $b \geq 1$ ,  $a + 2b$  divise  $R(b)$  ou  $2a + b$  divise  $R(a)$ . Fixons  $a \geq 1$  un entier pair qui n'est pas un zéro de  $R$ . Alors, il existe au plus un nombre fini d'entiers  $b \geq 1$  tels que  $2a + b$  divise  $R(a)$ ; c'est-à-dire que  $a + 2b$  divise  $R(b)$  pour une infinité d'entiers  $b \geq 1$ .

La division Euclidienne de  $R(x)$  par  $x + a/2$  donne  $R(x) = (x + a/2)R_a(X) + C_a$ , pour un certain entier  $C_a$ . Autrement dit,  $2R(x) = (2x + a)R_a(x) + 2C_a$ . En posant  $x = b$ , on déduit que  $C_a$  est divisible par  $a + 2b$  pour une infinité de  $b \geq 1$  et donc  $C_a = 0$ . Par conséquent,  $R(-a/2) = 0$ . Comme  $a$  peut être n'importe quel entier pair qui n'est pas un zéro de  $R$ , il s'en suit que  $R$  a une infinité de zéros et est donc le polynôme nul. On termine comme dans la solution précédente.

2. Judith a réuni ses 2026 amis en cercle, de sorte que chacun de ses amis ait une personne à sa gauche et une personne à sa droite. Judith souhaite leur expliquer sa solution astucieuse à un problème d'olympiade qui se raconte en quelques secondes.

À 17 h 00, Judith choisit un de ses amis et lui raconte sa solution. Par la suite, chaque minute à partir de 17 h 01, deux choses se produisent. Tout d'abord, chaque ami qui connaît la solution de Judith la raconte à ses deux voisins. Ensuite, Judith choisit un de ses amis et lui raconte sa solution. Déterminer le plus petit entier  $n$  tel qu'il soit possible que tous les amis de Judith connaissent sa solution après  $n$  minutes.

## Solution

**Réponse :**  $n = 46$ .

**Première partie : Minoration** ( $n \geq 46$ ) Un ami qui apprend la solution à l'instant  $t$  peut la partager à ses voisins et ainsi informer au plus  $2m + 1$  personnes (lui inclus) après  $m$  minutes de propagation. Comme Judith instruit un nouvel ami chaque minute de 17 h 00 à 17 h  $(n - 1)$ , le nombre maximal de personnes informées après  $n$  minutes est majoré par la somme des capacités de propagation de chaque ami :

$$\sum_{j=0}^{n-1} (2j + 1) = n^2$$

Pour  $n = 45$ , le nombre d'amis informés est au plus  $45^2 = 2025$ . Comme Judith a 2026 amis, il restera nécessairement au moins une personne non informée à 17 h 45. Ainsi,  $n \geq 46$ .

**Deuxième partie : Construction** ( $n = 46$ ) Montrons qu'il est possible d'informer tout le monde pour  $n = 46$ . On isole un ami, nommé Bob. Il reste 2025 amis que l'on subdivise en 45 intervalles consécutifs de longueurs impaires décroissantes : 89, 87, 85, ..., 3, 1. La somme de ces longueurs est  $45^2 = 2025$ .

Durant les 45 premières minutes (de 17 h 00 à 17 h 44), Judith explique sa solution à l'ami situé exactement au centre de chaque intervalle, en commençant par l'intervalle le plus long (89) jusqu'au plus court (1).

- ▶ L'ami au centre du premier bloc a 45 minutes pour informer ses 44 voisins de gauche et 44 voisins de droite (total 89).
- ▶ L'ami du deuxième bloc a 44 minutes pour couvrir un intervalle de 87 personnes, et ainsi de suite.

À 17 h 45, les 2025 amis sont informés. Enfin, durant la 46-ème minute (à 17 h 45), Judith explique sa solution à Bob. À 17 h 46 ( $n = 46$ ), les 2026 amis connaissent la solution.

3. Soit  $ABC$  un triangle acutangle avec  $AB \neq AC$ . On note  $H$  l'orthocentre de  $ABC$  et  $M$  le milieu de  $[BC]$ . Soient  $D$  et  $E$  les projetés orthogonaux de  $H$  sur la bissectrice intérieure, respectivement extérieure, de l'angle  $\widehat{BAC}$ . Montrer que les points  $D, E, M$  sont alignés.

## Solutions

**Première solution :** Soient  $N$  le milieu de  $[AH]$  et  $\omega$  le cercle de diamètre  $[AH]$ . Comme  $[AD]$  et  $[AE]$  les bissectrices intérieur et extérieur de  $\angle A$ , alors  $\angle EAD = 90^\circ$ . Or  $\angle HEA = \angle HDA = 90^\circ$ , alors  $ADHE$  est un rectangle et par suite  $E, N, D$  alignés.

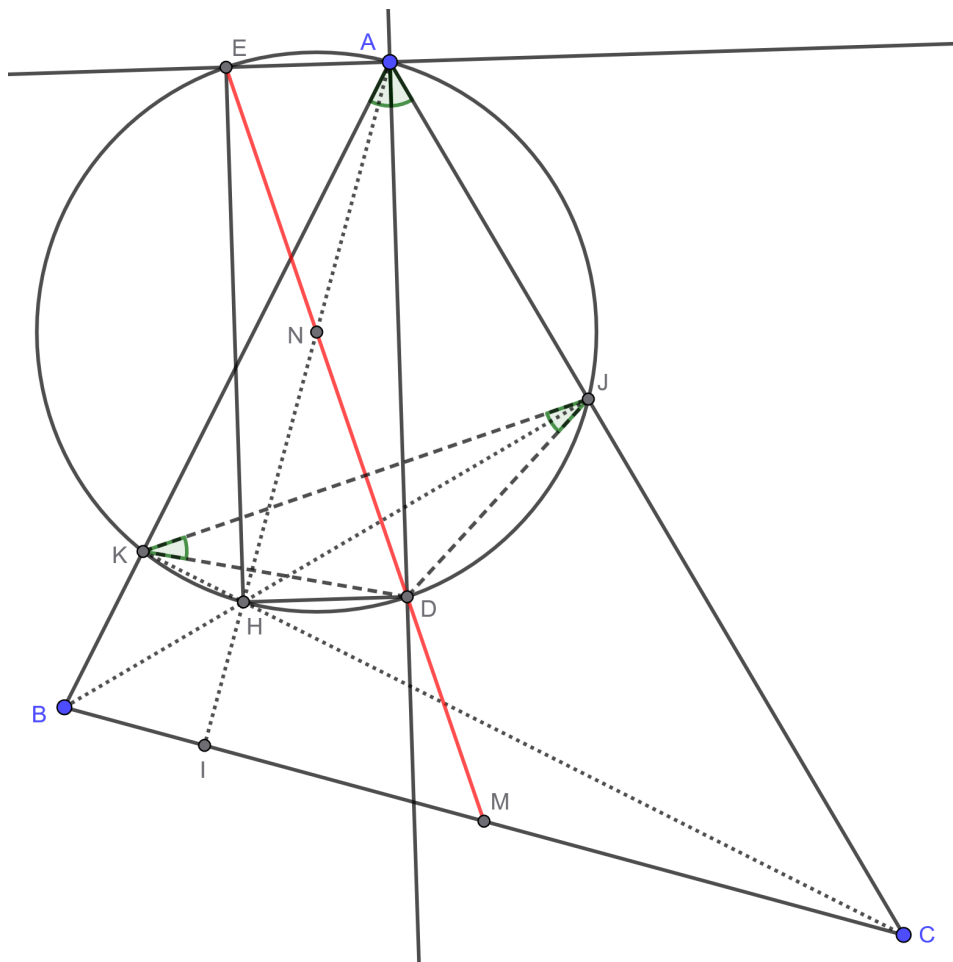
Soit  $I, J$  et  $K$  les projetés orthogonaux de  $H$  sur  $(BC)$ ,  $(AC)$  et  $(AB)$  respectivement. On a  $\angle AKH = \angle AJH = 90^\circ$ , alors  $K$  et  $J$  appartiennent au cercle de diamètre  $[AH]$ . Et par suite

$$NK = NJ \quad (1)$$

On a  $\angle BKC = \angle BJC = 90^\circ$ , alors  $K$  et  $J$  appartiennent au cercle de diamètre  $[BC]$ . Et par suite

$$MK = MJ \quad (2)$$

D'après (1) et (2), la droite  $(MN)$  est la médiatrice de  $[KJ]$ . On a  $\angle AJH = \angle ADH = 90^\circ$ , alors  $A, J, D, H$  sont cocycliques. On a  $\angle AKH + \angle ADH = 180^\circ$ , alors  $A, D, H, K$  sont cocycliques. Donc  $A, J, D, H, K$  sont cocycliques. Donc  $\angle KAD = \angle KJD$  et  $\angle DAJ = \angle DHJ = \angle DKJ$ . On a  $\angle KAD = \angle DAJ$  (bissectrice). Donc  $\angle DKJ = \angle KJD$ . D'où  $KJD$  est isocèle en  $D$ . Et par suite  $D \in (MN)$ . Donc  $E, D, M$  sont alignés.



**Deuxième solution :** On utilise la même notation que dans la première solution. On observe que  $\angle HAB = 90^\circ - \angle CBA$ . Donc,

$$\angle DNH = 2\angle DAH = 2\angle DAB - 2\angle HAB = \angle ABC - \angle ACB.$$

Il reste donc à montrer que  $\angle MNH = \angle ABC - \angle ACB$ . Or, par le cercle des 9 points,  $I, N, J, M$  sont cocycliques. Donc  $\angle MNH = \angle MNI = \angle MJI$ . De plus,  $J$  appartient au cercle de diamètre  $[BC]$ . Donc  $\angle IMJ = 2\angle ACB$ . Comme  $I, H, J, C$  sont cocycliques, alors  $\angle MIJ = \angle CHJ$ . Comme  $J, H, K, A$  sont cocycliques, on a  $\angle CHJ = \angle BAC$ . En conclusion,  $\angle MJI = 180 - 2\angle ACB - \angle BAC = \angle ABC - \angle ACB$ .

4. Montrer qu'il existe un nombre entier  $n \geq 1$ , pour lequel il existe au moins 2026 triplets  $(a, b, c)$  de nombres entiers strictement positifs tels que

$$a^2 + b^3 + c^4 = n.$$

## Solution

Fixons un nombre entier  $N \geq 1$  et regardons la fonction

$$f: \{(a, b, c) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^3 \mid a \leq N^6, b \leq N^4, c \leq N^3\} \longrightarrow \mathbb{N}_{\geq 1} \\ (a, b, c) \longmapsto a^2 + b^3 + c^4.$$

Si  $(a, b, c)$  est dans le domaine de  $f$ ,

$$a^2 + b^3 + c^4 \leq (N^6)^2 + (N^4)^3 + (N^3)^4 = 3N^{12}.$$

La fonction  $f$  est donc à valeurs dans  $[1, 3N^{12}]$ . Il y a donc au plus  $3N^{12}$  images possibles pour  $f$ . En outre, le domaine de  $f$  contient  $N^6 \cdot N^4 \cdot N^3 = N^{13}$  éléments. Par le principe des tiroirs, il y a au moins une image de  $f$  qui est atteinte par au moins  $\lceil \frac{N^{13}}{3N^{12}} \rceil \geq \frac{N}{3}$  éléments du domaine. En prenant  $N = 3 \cdot 2026$ , nous obtenons la conclusion.