Olympiade Francophone de Mathématiques

Septième édition

Épreuve Senior

28 mars 2026

Durée : 4 heures et demie.
Difficulté : Les exercices *ne sont pas* classés selon leur difficulté.
Langue : Les solutions doivent être rédigées en français.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

1. Trouver tous les polynômes P à coefficients entiers tels que, pour tous les entiers $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$, le nombre $P(a) - P(b)$ soit divisible par $a + 2b$ ou par $2a + b$.

2. Judith a réuni ses 2026 amis en cercle, de sorte que chacun de ses amis ait une personne à sa gauche et une personne à sa droite. Judith souhaite leur expliquer sa solution astucieuse à un problème d'olympiade qui se raconte en quelques secondes.

À 17 h 00, Judith choisit un de ses amis et lui raconte sa solution. Par la suite, chaque minute à partir de 17 h 01, deux choses se produisent. Tout d'abord, chaque ami qui connaît la solution de Judith la raconte à ses deux voisins. Ensuite, Judith choisit un de ses amis et lui raconte sa solution. Déterminer le plus petit entier n tel qu'il soit possible que tous les amis de Judith connaissent sa solution après n minutes.

3. Soit ABC un triangle acutangle avec $AB \neq AC$. On note H l'orthocentre de ABC et M le milieu de $[BC]$. Soient D et E les projetés orthogonaux de H sur la bissectrice intérieure, respectivement extérieure, de l'angle $\widehat{BAC}$. Montrer que les points D, E, M sont alignés.

4. Montrer qu'il existe un nombre entier $n \geqslant 1$, pour lequel il existe au moins 2026 triplets (a, b, c) de nombres entiers strictement positifs tels que

$$a^2 + b^3 + c^4 = n.$$